CONVERGENCE COMPLÈTE DES MOYENNES PARTIELLES DANS LES TABLEAUX À RANGÉES INFINIMENT INTERCHANGEABLES

par

Ahmed L'Moudden

mémoire présenté au Département de mathématiques
et d'informatique en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, août 1998

0-612-40597-4

Le 12 août 1998, le jury suivant a accepté ce mémoire dans sa version finale.
date

Président-rapporteur:	M. Alain Boulanger Département de mathématiques et d'informatique
Membre:	M. Bruno Rémillard Université du Québec à Trois-Rivières
Membre:	M. Jean Vaillancourt Département de mathématiques et d'informatique

Sommaire

Dans un premier chapitre portant sur les suites de variables aléatoires (v.a.) on va énoncer la loi forte des grands nombres de Kolmogorov, ainsi que la loi complète de Hsu-Robbins-Erdös pour les suites indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). On va aussi démontrer des généralisations de ces deux théorèmes pour les suites de variables aléatoires infiniment interchangeables, en utilisant le théorème de deFinetti — la forme générale de la loi forte est celle de Taylor et Hu et celle de la loi complète est un résultat nouveau. Enfin, on fournira la démonstration de la convergence de toutes les sous-suites, pour les deux modes de convergence.

Dans le deuxième chapitre, on présente un résumé des travaux publiés récemment sur les convergences fortes et complètes pour les tableaux à rangées de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) ainsi que pour les tableaux à rangées infiniment interchangeables: ceux de Daffer, Patterson et Taylor; ceux de Taylor et Hu; et surtout quelques-unes des innovations de Gut.

Finalement, le troisième chapitre rassemble nos résultats nouveaux sur le problème de la convergence ou divergence complète dans les tableaux à rangées i.i.d., ainsi que dans les tableaux à rangées infiniment interchangeables. Une attention particulière est apportée au comportement des moyennes partielles dont la croissance du nombre de termes ne peut pas être ralentie indéfiniment.

Remerciements

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à :

• Monsieur le professeur Jean Vaillancourt, mon directeur de recherche, pour m'avoir accueilli dans son équipe et pour avoir guidé avec compétence ce travail. Ses conseils avisés, ses encouragements constants, ses remarques très pertinentes et son aide matérielle ont grandement facilité la réalisation de ce travail, dont l'aboutissement est pour moi l'occasion de lui exprimer toute ma gratitude.

• Mes parents, et surtout mon père Khalil L'Moudden et mon frère Hassan L'Moudden pour leurs encouragements, leur patience et leur soutien, autant sur le plan financier que moral, qu'ils m'ont apportés en toutes circonstances durant mes études.

• Monsieur le professeur Jean-Marc Belley qui a soigneusement lu et corrigé ce texte.

• Toutes mes amies et tous mes amis.

Table des matières

Sommaire ii

Remerciements iii

Table des matières iv

Introduction 1

Chapitre1: La convergence forte et complète des suites 3

1.1 Interchangeabilité 3

1.2 La loi forte des grands nombres 7

1.3 La loi complète 10

1.4 La convergence partielle des suites 16

Chapitre2: La convergence complète des tableaux 18

2.1 La loi complète pour les tableaux à rangées de v.a.i.i.d. 18

2.2 La loi complète pour les tableaux à rangées infiniment interchangeables . 20

Chapitre3: Nouveaux résultats pour les tableaux 27

3.1 La convergence partielle des tableaux à rangées de v.a.i.i.d. 27

3.2 La convergence partielle des tableaux à rangées infiniment interchangeables 31

Conclusion 37

Annexe 38

Bibliographie 40

Introduction

Il existe depuis la première moitié du siècle une foule de théorèmes limites pour les suites de v.a.i.i.d. Mentionnons les plus importants :

- Loi des grands nombres de Kolmogorov en 1933,
- Théorèmes de la limite centrale de Lindeberg-Lévy-Feller en 1922-24 et 1935-37,
- Loi du logarithme itéré de Hartman-Wintner en 1941.

La théorie correspondante pour les suites interchangeables s'est développée beaucoup plus tard, suite aux travaux originaux de Bruno deFinetti en 1937. Les théorèmes limites correspondants à ceux cités plus haut sont les suivants:

- Loi forte des grands nombres de deFinetti en 1937 et, en version sous condition nécessaire et suffisante, celle de Taylor et Hu en 1987,
- Théorème de la limite centrale de Chow et Teicher en 1958,
- Loi du logarithme itéré de Taylor et Zhang en 1996. Dans ce dernier cas, la condition suffisante n'est peut-être pas nécessaire.

La convergence complète a été introduite par Hsu et Robbins en 1947, mais n'a été plus largement étudiée qu'au cours des vingt dernières années. Ces développements récents sont présentés aux chapitres 1 et 2.

L'étude des tableaux à rangées dont les v.a. sont interchangeables remonte au moins au théorème de la limite centrale de Lindeberg en 1923. Dans le contexte de la convergence complète, les résultats connus à ce jour sont résumés au chapitre 2.

Notre travail consiste à généraliser ces résultats pour la convergence ou divergence complète dans les tableaux à rangées i.i.d., ainsi que dans les tableaux à rangées infiniment interchangeables. Une attention particulière est apportée au comportement des moyennes partielles dont la croissance du nombres de termes ne peut pas être ralentie indéfiniment. Ces résultats sont présentés aux chapitres 2 et 3.

Chapitre 1

La convergence forte et complète des suites

1.1 Interchangeabilité

Définition 1 Étant donné une famille de variables aléatoires $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ construites sur un même espace de probabilité, on dit qu'elle est **interchangeable** (ou **échangeable**), si pour toute permutation π des indices de {1, 2, 3, ... ,n} et tout choix d'ensembles boréliens $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$, on a :

$$P(Y_m \in A_m, m = 1, 2, \ldots, n) = P(Y_{\pi(m)} \in A_m, m = 1, 2, \ldots, n).$$

Définition 2 On dit d'une suite de variables aléatoires $(Y_n)_n$ construites sur un même espace de probabilité qu'elle est **interchangeable** (ou **infiniment interchangeable**) si toute famille finie $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ est interchangeable, quel que soit $n \geq 2$.

Lemme 1 Soit $(Y_n)_n$ une famille interchangeable infinie et soit φ une fonction réelle convexe, positive et bornée inférieurement telle que $E(\varphi(Y_1)) < +\infty$. Alors la suite

$(E\varphi(\overline{Y}_n))_n$ est non croissante et convergente, où $\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Démonstration : On a

$$\overline{Y}_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} Y_i = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}(\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1} Y_i) \; .$$

Puisque φ est convexe, on a :

$$\varphi(\overline{Y}_{n+1}) = \varphi(\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}(\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1} Y_i)) \leq \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\varphi(\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1} Y_i)$$

et comme les $(Y_n)_n$ sont interchangeables, alors :

$$E\varphi(\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1} Y_i) = E\varphi(\overline{Y}_n), \forall j \leq n+1$$

d'où

$$E\varphi(\overline{Y}_{n+1}) \leq E\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\varphi(\frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} Y_i) \leq E\varphi(\overline{Y}_n).$$

i.e. $(E\varphi(\overline{Y}_n))_n$ est non croissante. Comme φ est bornée inférieurement, $(E\varphi(\overline{Y}_n))_n$ est aussi bornée inférieurement et donc convergente.

Définition 3 On appelle **filtration renversée** sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ toute famille $\{\mathcal{F}_n : n = 0, 1, 2, ...\}$ de tribus contenues dans $\mathcal{F}$ telles que $\mathcal{F}_m \supset \mathcal{F}_n$ pour tout choix de $0 \leq m \leq n < \infty$.

Définition 4 Une suite de v.a. $((X_n), \mathcal{F}_n)$ est une **martingale (respectivement, une sousmartingale, surmartingale) renversée** par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_n\}$ si les conditions suivantes sont vérifiées:

i) $\forall\, n,\ X_n$ est $\mathcal{F}_n - mesurable$

ii) $\forall\, n,\ E|X_n| < \infty$,

iii) $\forall\, n,\ E(X_n|\mathcal{F}_{n+1}) = X_{n+1}$ $(resp. \geq, \leq)$.

Lemme 2 *(Généralisation d'une inégalité de Kolmogorov)*

Soit $(Y_n)_n$ une famille interchangeable infinie telle que $E(|Y_1|) < +\infty$ et $E(Y_1) = 0$.

Alors: $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall m, n$ *avec* $1 \leq m \leq n < +\infty$, on a :

$$P(\max_{m \leq k \leq n} |\overline{Y}_n - \overline{Y}_k| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} E|\overline{Y}_n - \overline{Y}_m|.$$

Démonstration : D'après le théorème 23 (voir l'Annexe), si on prend f(x)=x, alors

$$\overline{Y}_j = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} Y_k = E(Y_1|\mathcal{F}_j) \; p.s.$$

et $(\overline{Y}_j, \mathcal{F}_j)$ est une martingale renversée. Si on pose

$$X_{n,k} = \begin{cases} \overline{Y}_n - \overline{Y}_m & pour \quad 0 \leq k \leq m \\ \overline{Y}_n - \overline{Y}_k & pour \quad m \leq k \leq n \\ 0 & pour \quad k \geq n \end{cases}$$

alors $(X_{n,k}, \mathcal{F}_k)$ est aussi une martingale renversée. Or,

$$E|X_{n,k}| \leq 2E|Y_1| < \infty$$

d'où $(|X_{n,k}|, \mathcal{F}_k)$ est une sousmartingale renversée. On pose donc

$X^*_{n,k} = |X_{n,n-k+m}|$ et $\mathcal{F}^*{}_k = \mathcal{F}_{n-k+m}$ pour $k = 0, 1, ..., n+m$ et $X^*_{n,k} = X^*_{n,n+m}$ et $\mathcal{F}^*{}_k = \mathcal{F}^*{}_{n+m}$ si $k > n+m$. C'est évident que $m \leq k \leq n$ implique que $m \leq n-k+m \leq n$ et $(X^*_{n,k}, \mathcal{F}^*{}_k)_{m \leq k \leq n}$ est donc une sousmartingale.

En effet, presque sûrement, on a :

$$\begin{aligned} E(X^*_{n,k+1}|\mathcal{F}^*{}_k) &= E(|X_{n,n-k-1+m}| \, |\mathcal{F}_{n-k+m}) \\ &= E(|X_{n,(n-k+m)-1}| \, |\mathcal{F}_{n-k+m}) \\ &\geq |X_{n,n-k+m}| = X^*_{n,k} \end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Doob pour les sousmartingales, on a :

$$P(\max_{m \leq k \leq n} X^*_{n,k} > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} E(X^*_{n,n}).$$

Comme

$$P(\max_{m\leq k\leq n} X^*_{n,k} > \varepsilon) = P(\max_{m\leq k\leq n} |\overline{Y}_n - \overline{Y}_k| > \varepsilon)$$

et

$$E(X^*_{n,n}) = E|X_{n,m}| = E|\overline{Y}_n - \overline{Y}_m|,$$

on obtient

$$P(\max_{m\leq k\leq n} |\overline{Y}_n - \overline{Y}_k| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}E|\overline{Y}_n - \overline{Y}_m|, \forall\varepsilon > 0.$$

Lemme 3 Soit $(Y_n)_n$ une famille interchangeable infinie, d'espérance nulle et de variance finie. Alors, $\forall\varepsilon > 0, \exists N$ tel que, $\forall m, n$ avec $n \geq m \geq N$ on a

$$E|\overline{Y}_n - \overline{Y}_m|^2 < \varepsilon \text{ et } E|\overline{Y}_n - \overline{Y}_m| < \sqrt{\varepsilon}.$$

i.e. $(\overline{Y}_n)_n$ est de type $L_2 - Cauchy$ et de type $L_1 - Cauchy$. De plus, elle est de type Cauchy presque sûrement.

Démonstration : D'après le lemme 1, $(E|\overline{Y}_n|)_n$ et $(E\overline{Y}_n^{\,2})_n$ sont monotones et convergentes dans $\mathcal{R}$, et puisque $(\overline{Y}_n, \mathcal{F}_n)_n$ est une martingale renversée de carré intégrable, alors $\forall\varepsilon > 0, \exists N$ tel que, $\forall m$ *et* n où $n \geq m \geq N$

$$E|\overline{Y}_n - \overline{Y}_m|^2 = E|\overline{Y}_m|^2 - E|\overline{Y}_n|^2 < \varepsilon$$

et

$$E|\overline{Y}_n - \overline{Y}_m| \leq \sqrt{E|\overline{Y}_m - \overline{Y}_n|^2} < \sqrt{\varepsilon}$$

i.e $(\overline{Y}_n)_n$ est de type $L_2 - Cauchy$ et aussi de type $L_1 - Cauchy$. Par le lemme 2, on a

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty} P(\max_{m\leq k\leq n} |\overline{Y}_n - \overline{Y}_k| > \varepsilon) = 0 \text{ et } \lim_{m\longrightarrow+\infty} P(\sup_{k\geq m} |\overline{Y}_n - \overline{Y}_k| > \varepsilon) = 0$$

i.e. $(\overline{Y}_n)_n$ est de type *Cauchy p.s.*

1.2 La loi forte des grands nombres

La loi forte des grands nombres pour les suites de variables *interchangeables*, due à deFinetti (1937), stipule que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \overline{Y}_n = E(Y_1|\mathcal{T})\ p.s \text{ et } \lim_{n\longrightarrow+\infty} E(\overline{Y}_n) = E(Y_1)$$

sont vrais, pour toute suite *interchangeable* $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots\}$ satisfaisant à l'hypothèse $E(|Y_1|) < +\infty$ avec $\mathcal{T} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma(Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots)$, la tribu terminale associée. Nous allons démontrer cette généralisation de la loi forte des grands nombres par le biais des assertions qui sont annoncées par L. Pratelli (1989). Mais d'abord, nous allons énoncer le théorème de la loi forte des grands nombres pour les suites i.i.d. et les suites interchangeables, dont la première est due à Kolmogorov et la deuxième à Taylor et Hu (1987).

Théorème 1 (Kolmogorov) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. et d'espérance finie. Alors

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow_{n\to+\infty} EX_1\ p.s.$$

Théorème 2 *[12]* Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires interchangeables telle que $E_F(|X_1|) < \infty\ \mu - p.s.$ Alors

$$\mu(\{F : E_F X_1 = 0\}) = 1 \text{ si et seulement si } \overline{X}_n \longrightarrow_{p.s.} 0.$$

Où $E_F(\bullet) = E(\bullet|\sigma(\Phi))$, $\sigma(\Phi)$ étant défini au théorème 25.

Démonstration : Si $\mu(\{F : E_F X_1 = 0\}) = 1$ alors, d'après le théorème 25 de deFinetti (voir l'Annexe)

$$
\begin{aligned}
P[|\overline{X}_n| > \varepsilon \;\; i.s.] &= \lim_{m\rightarrow+\infty} P[\bigcup_{n=m}^{\infty}\{|\overline{X}_n| > \varepsilon\}] \\
&= \lim_{m\rightarrow+\infty} \int_{\Phi} P_F[\bigcup_{n=m}^{\infty}\{|\overline{X}_n| > \varepsilon\}]d\mu(F) \\
&= \int_{\Phi} \lim_{m\rightarrow+\infty} P_F[\bigcup_{n=m}^{\infty}\{|\overline{X}_n| > \varepsilon\}]d\mu(F) \quad (\text{ convergence dominée}) \\
&= \int_{\Phi} P_F[|\overline{X}_n| > \varepsilon \;\; i.s.]d\mu(F) \\
&= 0 \quad (\ \{X_n\} \ sont\ F - i.i.d.\ pour\ tout\ F \in \Phi)
\end{aligned}
$$

Si $\mu(\{F : E_F X_1 = 0\}) < 1$ alors il existe un t tel que $\mu(\{F : |E_F X_1| > t\}) > 0$. Donc par la loi forte des grands nombres, on a $P_F[\ |\overline{X}_n| > t \;\; i.s.] = 1$ sur cet ensemble, d'où

$$
\begin{aligned}
P[|\overline{X}_n| > t \;\; i.o.] &= \int_{\Phi} P_F[|\overline{X}_n| > t \;\; i.s.]d\mu(F) \\
&\geq \mu(\{F : |E_F X_1| > t\}) > 0.
\end{aligned}
$$

$$
i.e. \;\; P(\omega : \lim_{n\rightarrow+\infty} \overline{X}_n = 0) \neq 1.
$$

Définition 5 Étant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, une famille de variables aléatoires $\{X_s : s \in S\}$ quelconques , définies sur cet espace, est dite **uniformément intégrable** (u.i.) si on a

$$
\lim_{c\rightarrow\infty} \sup_{s\in S} E\left[|X_s| I_{(c,\infty)}(|X_s|)\right] = 0.
$$

Lemme 4 Soit $(Y_n)_n$ une suite de variables aléatoires interchangeables, d'espérance finie. Alors

$$
\overline{Y}_n \longrightarrow_{n\rightarrow+\infty} 0 \; p.s. \text{ si et seulement si } \lim_{n\longrightarrow+\infty} E(|\overline{Y}_n|) = 0.
$$

Démonstration : Si $\lim_{n\longrightarrow+\infty} E(|\overline{Y}_n|) = 0$ alors en utilisant le lemme 2, l'inégalité de Markov, et l'inégalité du triangle, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
P(\sup_{n\geq m}|\overline{Y}_n| > 2\varepsilon) &= \lim_{k\longrightarrow+\infty} P(\max_{m\leq n\leq k}|\overline{Y}_n| > 2\varepsilon) \\
&\leq \lim_{k\longrightarrow+\infty}(P(\max_{m\leq n\leq k}|\overline{Y}_n - \overline{Y}_k| > \varepsilon) + P(|\overline{Y}_k| > \varepsilon)) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}E|\overline{Y}_m - \overline{Y}_k| + \frac{1}{\varepsilon}|\overline{Y}_k| \\
&\leq \frac{2}{\varepsilon}E|\overline{Y}_m| = 0
\end{aligned}
$$

D'où on obtient

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty} P(\sup_{n\geq m}|\overline{Y}_n| > 2\varepsilon) \leq \lim_{m\longrightarrow+\infty}\frac{2}{\varepsilon}E|\overline{Y}_m| = 0, \forall\varepsilon > 0.$$

$$i.e.\quad \overline{Y}_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0\ p.s.$$

Si maintenant $\overline{Y}_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ p.s. alors d'après le théorème 26 (voir l'Annexe), $\overline{Y}_n$ est uniformément intégrable, d'où

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} E(|\overline{Y}_n|) = E\lim_{n\longrightarrow+\infty}|\overline{Y}_n| = 0.$$

Théorème 3 Si $(Y_n)_n$ est une suite de variables aléatoires interchangeables d'espérance finie, alors

$$\overline{Y}_n \longrightarrow_{n\to+\infty} E(Y_1|\mathcal{F}_\infty)\ p.s. \text{ et } \overline{Y}_n \longrightarrow_{L_1} E(Y_1|\mathcal{F}_\infty).$$

Démonstration : D'après le théorème 27 (voir l'Annexe), la limite de $\overline{Y}_n$ existe presque sûrement puisque $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\overline{Y}_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty}E(Y_1|\mathcal{F}_n) = E(Y_1|\mathcal{F}_\infty)$ p.s.; de plus, étant uniformément intégrable, on a

$$E\overline{Y}_n \longrightarrow_{n\to+\infty} EE(Y_1|\mathcal{F}_\infty) = EY_1.$$

1.3 La loi complète

La convergence complète a été introduite par Hsu et Robbins en 1947 mais n'a été plus largement étudiée qu'au cours des vingt dernières années. Nous allons énoncer la loi complète de Hsu-Robbins-Erdös pour les suites indépendantes et identiquement distribuées.

Définition 6 On dit qu'une suite $\{U_n, n \geq 1\}$ converge complètement vers une constante C si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} P(|U_n - C| > \varepsilon) < \infty \; \forall \varepsilon > 0$. On note $U_n \longrightarrow_{n \to +\infty} C \;\; c.c.$

Lemme 5 Si la suite $\{U_n, n \geq 1\}$ converge complètement vers une constante C , alors U_n converge presque sûrement vers la même constante C.

Démonstration : On a

$$P(\sup_{n \geq m} |U_n - C| > \varepsilon) = P(\cup_{n=m}^{\infty}[|U_n - C| > \varepsilon]) \leq \sum_{n=m}^{\infty} P(|U_n - C| > \varepsilon)$$

d'où

$$P(\sup_{n \geq m} |U_n - C| > \varepsilon) \longrightarrow_{m \to +\infty} 0. \quad i.e. \quad U_n \longrightarrow_{n \to +\infty} C \;\; p.s.$$

Théorème 4 (Hsu-Robbins-Erdös) Si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. telle que $EX_1 = 0$ alors,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\overline{X}_n| > \varepsilon) < \infty \;\; \forall \varepsilon > 0 \text{ si et seulement si } EX_1^2 < \infty.$$

Lemme 6 Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires interchangeables et soit f une fonction borélienne sur $\mathbf{R}$. Si $E|f(X_1)||f(X_2)|...|f(X_k)| < \infty$ pour un $k \geq 1$ alors

$$E|f(X_1)| < \infty.$$

Théorème 5 Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires interchangeables telle que $E(X_1^2 X_2^2) < \infty$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\overline{X}_n| > \varepsilon) < \infty, \ \forall \varepsilon > 0 \text{ si et seulement si } E(X_1|\mathcal{T}) = 0 \ p.s.$$

$$\text{où} \qquad \mathcal{T} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$$

est la tribu terminale.

Démonstration: Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\overline{X}_n| > \varepsilon) < \infty, \forall \varepsilon > 0$, alors par le lemme 5, $\overline{X}_n$ converge presque sûrement vers 0. Il s'ensuit par le théorème 2 que $E(X_1|\mathcal{T}) = 0 \ p.s.$
Montrons maintenant que si $E(X_1^2 X_2^2) < \infty$ et $E(X_1|\mathcal{T}) = 0 \ p.s.$ alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\overline{X}_n| > \varepsilon) < \infty \ \forall \varepsilon > 0.$$

En effet :
Puisque les X_k ont la même distribution, on peut poser $a_i = P(\omega : |X_k(\omega)| > 2^i)$. Donc

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^{2i-1} a_i \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{2i}(a_i - a_{i+1}) \leq EX_1^2 \leq 1 + \sum_{i=0}^{\infty} 2^{2i+2}(a_i - a_{i+1})$$

ce qui donne : $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{2i} a_i < \infty$ car $EX_1^2 < \infty$ (voir lemme 6).
Soit n tel que $2^i \leq n < 2^{i+1}$. On pose pour tout γ fixe dans $]\frac{3}{4}, 1[$:

$$\begin{aligned}
S_n &= \{\omega : |\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)| > n\} \\
S_n^{(1)} &= \{\omega : |X_k(\omega)| > 2^{i-2}, \text{ pour au moins un } k \leq n\} \\
S_n^{(2)} &= \{\omega : |X_{k_1}(\omega)| > n^\gamma, |X_{k_2}(\omega)| > n^\gamma \text{ pour au moins } k_1 \text{ et } k_2 \text{ tels que } k_1 < k_2 \leq n\} \\
S_n^{(3)} &= \{\omega : |\sum_{k=1}^{n} X'_{k,n}(\omega)| > 2^{i-2}\}
\end{aligned}$$

$$\text{avec} \qquad X'_{k,n} = \begin{cases} X_k & \text{si } |X_k| \leq n^\gamma \\ 0 & \text{si } |X_k| > n^\gamma. \end{cases}$$

On peut voir facilement que $S_n \subset S_n^{(1)} \cup S_n^{(2)} \cup S_n^{(3)}$ car, si $\omega \notin S_n^{(1)} \cup S_n^{(2)} \cup S_n^{(3)}$, on a

$$|\sum_{k=1}^n X_k(\omega)| \leq |\sum_{k=1}^n X_k(\omega) I[|X_k| \leq n^\gamma]| + |\sum_{k=1}^n X_k(\omega) I[|X_k| > n^\gamma]| \leq 2^{i-2} + 2^{i-2} \leq n.$$

Donc, pour prouver la convergence de la série $\sum_{n=1}^\infty P(S_n)$, il suffit de montrer que

$$\sum_{n=1}^\infty (P(S_n^{(1)}) + P(S_n^{(2)}) + P(S_n^{(3)})) < \infty.$$

En effet, pour $S_n^{(1)}$ on a

$$P(S_n^{(1)}) \leq nP(|X_1| > 2^{i-2}) < 2^{i+1} P(|X_1| > 2^{i-2}) \leq 2^{i+1} P(4|X_1| > 2^i)$$

et donc

$$\sum_{n=1}^\infty P(S_n^{(1)}) = \sum_{i=0}^\infty \sum_{2^i \leq n < 2^{i+1}} P(S_n^{(1)}) < 2^2 \sum_{i=0}^\infty 2^{2i-1} P(4|X_1| > 2^i) < 64 E X_1^2 < \infty.$$

Pour $S_n^{(2)}$ on a

$$\begin{aligned} P(S_n^{(2)}) &\leq \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} P(\omega : |X_{k_1}(\omega)| > n^\gamma, |X_{k_2}(\omega)| > n^\gamma) \\ &\leq \frac{n(n-1)}{2} P(\omega : |X_1(\omega)| > n^\gamma, |X_2(\omega)| > n^\gamma) \\ &< n^2 n^{-4\gamma} (E X_1^2 X_2^2) = n^{2-4\gamma} (E X_1^2 X_2^2). \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^\infty P(S_n^{(2)}) < E X_1^2 X_2^2 \sum_{n=1}^\infty n^{2-4\gamma} < \infty.$$

Pour $S_n^{(3)}$ on a, d'après le théorème 24 (voir l'Annexe) les variables $(X'_{k,n})_k$ sont aussi $\mathcal{T}$-i.i.d. Soient $E(X'_{k,n}|\mathcal{T}) = \varepsilon_n$ et $Y_k = X'_{k,n} - \varepsilon_n$. Alors $E(Y_k|\mathcal{T}) = 0$ et $\varepsilon_n \to 0$ presque sûrement quand $n \to \infty$ car $E(X_1|\mathcal{T}) = 0$, et donc

$$E((\sum_{k=1}^{n} Y_k)^4|\mathcal{T}) = \sum_{k=1}^{n} E(Y_k^4|\mathcal{T}) + 6 \sum_{1\leq k<l\leq n} E(Y_k^2 Y_l^2|\mathcal{T}).$$

Or $\max |Y_k(\omega)| < n^\gamma + \varepsilon_n$, et on peut trouver successivement des v.a. c_1, c_2, c_3 et c_4 P-intégrables telles que

$$E(Y_k^4|\mathcal{T}) < (n^\gamma + \varepsilon_n)^2 E(Y_k^2|\mathcal{T}) = c_1(\omega) n^{2\gamma} \text{ (car } |\varepsilon_n| \leq n^\gamma),$$

$$E(Y_k^2 Y_l^2|\mathcal{T}) = E(Y_k^2|\mathcal{T}) E(Y_l^2|\mathcal{T}) = c_2(\omega),$$

$$E((\sum_{k=1}^{n} Y_k)^4|\mathcal{T}) < c_3(\omega) n^{2\gamma+1},$$

et, par l'inégalité de Markov,

$$P(|\sum_{k=1}^{n} Y_k| > \frac{n}{16}|\mathcal{T}) < c_4(\omega).n^{2\gamma-3}.$$

Et puisque $|X_k'| < |Y_k| + \varepsilon_n$ et $n/8 < 2^{i-2}$, alors

$$\begin{aligned} P(\omega : |\sum_{k=1}^{n} X_k'(\omega)| > 2^{i-2}|\mathcal{T}) &\leq P(\omega : |\sum_{k=1}^{n} X_k'(\omega)| > \frac{n}{8}|\mathcal{T}) \\ &\leq P(\omega : |\sum_{k=1}^{n} Y_k(\omega)| > \frac{n}{16}|\mathcal{T}) + P(\omega : |\varepsilon_n(\omega)| > 1/16). \end{aligned}$$

Or on a

$$P(\omega : |\sum_{k=1}^{n} Y_k(\omega)| > \frac{n}{16}|\mathcal{T}) < c_4(\omega) n^{2\gamma-3}.$$

Et par le théorème de deFinetti, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega : |\sum_{k=1}^{n} Y_k(\omega)| > \frac{n}{16}) < \infty.$$

Donc pour assurer la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega : |\sum_{k=1}^{n} X_k^{'}(\omega)| > 2^{i-2})$, il suffit de montrer que $E(X_1|\mathcal{T}) = 0$ implique :

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega : |\varepsilon_n(\omega)| > 1/16) \leq (16)^2 \sum_{n=1}^{\infty} E(\varepsilon_n^2) < \infty.$$

Puisqu'on peut écrire $\varepsilon_n = -E[X_1 I_{(n^\gamma,\infty)}|\mathcal{T}]$, on obtient par les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Markov,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^2 &\leq (E[|X_1| I_{(n^\gamma,\infty)}|\mathcal{T}])^2 \\
&\leq E(X_1^2|\mathcal{T}) P(|X_1| > n^\gamma|\mathcal{T}) \\
&\leq E(X_1^2|\mathcal{T})^2 n^{-2\gamma}.
\end{aligned}$$

On obtient, par $EX_1^2X_2^2 < \infty$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P(\omega : |\varepsilon_n(\omega)| > 1/16) &\leq (16)^2 \sum_{n=1}^{\infty} E(\varepsilon_n^2) \\
&\leq (16)^2 E(X_1^2X_2^2). \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\gamma} < \infty.
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n^{(3)}) < c_4 \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\gamma-3} + (16)^2 E(X_1^2X_2^2). \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\gamma} < \infty.$$

Enfin, quitte à considérer les variables $\frac{X_k}{\varepsilon}$ dans S_n, on peut conclure que $\forall \varepsilon > 0$, il existe deux constantes $C_1 = C_1(\varepsilon)$ et $C_2 = C_2(\varepsilon)$ dans $\mathcal{R}^+$ telles que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{\omega : |\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)| > n\varepsilon\}) \leq C_1 EX_1^2 + C_2 E(X_1^2X_2^2).$$

Pour compléter cette section, nous démontrons quelques résultats connexes sur la convergence complète des sous-suites.

Lemme 7 Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires interchangeables telle que $EX_1X_2 = 0$ et $EX_1^2 < \infty$. Alors pour toute suite d'entiers positifs $(k_n)_n$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} < \infty$ on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\overline{X}_{k_n}| > \varepsilon) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Lemme 8 Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires interchangeables telle que $EX_1X_2 = 0$ et $EX_1^2 < \infty$. Alors pour toute suite numérique $(u_n)_n$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{u_n^2} < \infty$ on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\frac{S_n}{u_n}| > \varepsilon) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Lemme 9 Soit $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires interchangeables telle que $EX_1^2 < \infty$, alors la suite $(Y_n)_n := (X_n - E(X_1|\mathcal{T}))_n$ est aussi interchangeable avec $EY_1 = 0$, $EY_1Y_2 = 0$ et $EY_1^2 < \infty$.

Démonstration : L'interchangeabilité des variables vient du fait que la fonction génératrice des moments φ_{Y_1,Y_2} de (Y_1, Y_2) vérifie

$$\varphi_{Y_1,Y_2}(t_1, t_2) = \varphi_{Y_1,Y_2}(t_2, t_1) \quad \forall (t_1, t_2) \in \mathcal{R}^2.$$

Montrons que $EY_1Y_2 = 0$. En effet

$$Y_1Y_2 = X_1X_2 - X_1E(X_1|\mathcal{T}) - X_2E(X_1|\mathcal{T}) + E(X_1|\mathcal{T})^2.$$

Or $EX_1^2 < \infty$. Donc EX_1X_2 existe, d'où $EY_1Y_2 = 0$. Enfin , $EY_1^2 \leq EX_1^2 < \infty$, car $E[(X - E(X|\mathcal{T}))^2] \leq E[(X - Z)^2]$, $\forall Z$ $\mathcal{T}$-mesurable, en particulier $Z = 0$.

Lemme 10 Si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires interchangeables telle que $EX_1^2 < \infty$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} P(|\frac{S_n - nE(X_1|\mathcal{T})}{n^{1+\gamma}}| > \varepsilon) < \infty$ $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall \gamma > 0$.

Lemme 11 Si $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires interchangeables telle que $EX_1^4 < \infty$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\overline{X}_n - E(X_1|\mathcal{T})| > \varepsilon) < \infty \;\; \forall \varepsilon > 0.$$

Démonstration : Si on pose $Y_n = X_n - E(X_1|\mathcal{T})$, alors

$$\varepsilon^4 P(|\overline{Y}_n| > \varepsilon) < \frac{EY_1^4}{n^3} + 6\frac{EY_1^2 Y_2^2}{n^2} \quad \text{car} \;\; E(Y_1|\mathcal{T}) = 0,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\overline{Y}_n| > \varepsilon) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0.$$

i.e.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\overline{X}_n - E(X_1|\mathcal{T})| > \varepsilon) < \infty \;\; \forall \varepsilon > 0.$$

1.4 La convergence partielle des suites

Lemme 12 Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. et d'espérance finie, alors pour toute sous-suite d'entiers positifs $(k_n)_n$ telle que k_n croit ($\nearrow$) vers ∞

on a

$$\overline{X}_{k_n} = \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} X_i \longrightarrow_{n \to +\infty} EX_1 \; p.s.$$

Démonstration : D'après la loi forte des grands nombres, on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \overline{X}_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = EX_1 \; p.s.$$

i.e. $P(\omega \in \Omega : \lim_{n \longrightarrow +\infty} \overline{X}_n = EX_1) = 1$, et donc pour ω fixé on a $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \overline{X}_n(\omega) = EX_1$.
i.e. $\overline{X}_n(\omega)$ est une suite convergente, alors pour toute sous-suite d'entiers positifs k_n telle que $k_n \nearrow \infty$, la sous-suite $\overline{X}_{k_n}(\omega)$ de la suite $\overline{X}_n(\omega)$ converge vers la même limite, donc

$$P(\omega \in \Omega : \lim_{n \longrightarrow +\infty} \overline{X}_{k_n}(\omega) = EX_1) = 1.$$

$$i.e. \quad \overline{X}_{k_n} = \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} X_i \longrightarrow_{n\to+\infty} EX_1 \; p.s.$$

À partir de la loi forte des grands nombres de deFinetti pour les suites interchangeables, une même démonstration donne:

Lemme 13 Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires interchangeables et d'espérance conditionnelle finie (i.e. $E(|X_1||\mathcal{T}) < \infty$), alors pour toute sous-suite d'entiers positifs $(k_n)_n$ telle que $k_n \nearrow \infty$, on a

$$\overline{X}_{k_n} = \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} X_i \longrightarrow_{n\to+\infty} E(X_1|\mathcal{T}) \; p.s.$$

Chapitre 2

La convergence complète des tableaux

Dans ce chapitre, on présente un résumé des travaux publiés récemment sur les convergences fortes et complètes pour les tableaux à rangées de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) ainsi que pour les tableaux à rangées infiniment interchangeables: ceux de Taylor (1982), Patterson et Taylor (1985), Daffer, Patterson et Taylor (1985), Taylor et Hu (1987), et surtout quelques-unes des innovations de Gut (1992).

2.1 La loi complète pour les tableaux à rangées de v.a.i.i.d.

Définition 7 Soit $\{(X_{n,k}, 1 \leq k \leq k_n), n \geq 1\}$ une suite double de v.a. On dit qu'elle est **uniformément dominée** s'il existe une v.a. X telle que

$$P(|X_{n,k}| > x) \leq P(|X| > x) \ \ \forall x > 0 \ , \ \forall \, n \text{ et } k \leq k_n.$$

Définition 8 Soit $\{(X_{n,k}, 1 \leq k \leq k_n), n \geq 1\}$ une suite double de v.a. On dit qu'elle est **faiblement dominée en moyenne** s'il existe une v.a. X et un $\gamma > 0$ tels que

$$\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_n} P(|X_{n,k}| > x) < \gamma P(|X| > x) \ \ \forall\, x > 0 \text{ et } n \geq 1.$$

On remarque que la domination uniforme entraine la domination faible en moyenne ($\gamma = 1$).

Exemple Soit $\{(X_{n,k}, 1 \leq k \leq n), n \geq 1\}$ une suite double de v.a. telle que

$$P(X_{n,k} = 1) = P(X_{n,k} = -1) = 1/2 \text{ pour } \ k = 1, 2, ..., n-1$$

et

$$P(X_{n,n} = n^{1/4}) = P(X_{n,n} = -n^{1/4}) = 1/2.$$

On voit clairement qu'elle n'est pas uniformément dominée. Par contre elle est faiblement dominée en moyenne, puisque

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P(|X_{n,k}| > x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } 1 < x \leq n^{1/4} \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases}$$

la suite $\{(X_{n,k}, 1 \leq k \leq n), n \geq 1\}$ est faiblement dominée en moyenne par la v.a. X telle que $P(|X| > k) = \dfrac{2}{k^4}$ pour $k \geq 2^{1/4}$.

Théorème 6 *voir [1]* Soit $(X_{n,k}, 1 \leq k \leq k_n)_n$ une suite double de v.a.i.i.d. pour chaque $n \geq 1$, les variables aléatoires pouvant être dépendantes d'une rangée à l'autre, telle que

i) $EX_{n,k} = 0 \ \forall\, k \ et\ n.$

ii) $\{(X_{n,k},\ \ 1 \leq k \leq k_n), n \geq 1\}$ est uniformément dominée par une v.a. X.

iii) $E|X|^2 < \infty$.

iv) $\liminf\limits_{n \to +\infty} \dfrac{k_n}{n} > 0$

On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i}| > \varepsilon k_n) < \infty \ \forall \, \varepsilon > 0$$

et donc

$$\overline{X}_n = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i} \longrightarrow_{n \to +\infty} 0 \ c.c.$$

Théorème 7 *voir [1]* Soit $(X_{n,k}, 1 \leq k \leq k_n)$ i.i.d. pour chaque $n \geq 1$, les variables aléatoires pouvant être dépendantes d'une rangée à l'autre, telle que

i) $EX_{n,k} = 0$ et $E|X_{n,k}| < \infty$.

ii) $\{(X_{n,k}, \ \ 1 \leq k \leq k_n), n \geq 1\}$ est faiblement dominée en moyenne par une v.a. X.

iii) il existe p de (0,2) tel que $E|X|^p < \infty$.

iv) $\liminf_{n \to +\infty} \frac{k_{n+1}}{\sum_{i=1}^{n} k_i} > 0$.

On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i}| > \varepsilon k_n^{1/p}) < \infty \ \forall \, \varepsilon > 0$$

et si de plus la condition iii) est vraie pour p=1 alors

$$\overline{X}_n = \frac{1}{k_n} \sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i} \longrightarrow_{n \to +\infty} 0 \ c.c.$$

2.2 La loi complète pour les tableaux à rangées infiniment interchangeables

Théorème 8 *voir [8]* Soit $(X_{n,k}, 1 \leq k \leq n)$ une suite infiniment interchangeable pour chaque ligne telle que $\mathcal{T}_{nn} = \sigma\{\sum_{k=1}^{n} X_{n,k}, \sum_{k=1}^{n+1} X_{(n+1),k}, \ldots\}$. Sous les hypothèses suivantes:

i) $EX_{n,1}X_{n,2} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

ii) $EX_{n,1}^2 = o(n)$ i.e. $\frac{EX_{n,1}^2}{n} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

iii) $\{E(X_{n,1}|\mathcal{T}_{nn})\}_n$ est une martingale renversée

on a

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{n,i} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \; p.s.$$

Démonstration : On a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{n,i} = E(X_{n,1}|\mathcal{T}_{nn}) \; p.s.$ (voir l'Annexe). Or, l'inégalité de Doob pour les sousmartingales renversées (voir l'Annexe et la page 86 de [8]) donne

$$\begin{aligned}
P[\sup_{n\geq m} |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{n,k}| > \varepsilon] &= P[\sup_{n\geq m} |E(X_{n,1}|\mathcal{T}_{nn})| > \varepsilon] \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{[\sup_{n\geq m} |E(X_{n,1}|\mathcal{T}_{nn})| > \varepsilon]} |E(X_{m,1}|\mathcal{T}_{mm})| dP \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega} |E(X_{m,1}|\mathcal{T}_{mm})| dP \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega} |\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} X_{m,k}| dP
\end{aligned}$$

et par l'inégalité de Hölder pour p=q=2,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_{m,i}| dP &\leq [\int_{\Omega} |\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_{m,i}|^2 dP]^{1/2} \\
&= [E\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m} X_{m,i}^2 + E\frac{1}{m^2}\sum\sum_{k\neq l} X_{m,l}X_{m,k}]^{1/2} \\
&= [\frac{EX_{m,1}^2}{m} + \frac{m(m-1)}{m^2} EX_{m,1}X_{m,2}]^{1/2} \text{ par l'interchangeabilité.}
\end{aligned}$$

Puisque $EX_{n,1}X_{n,2} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ et $EX_{n,1}^2 = o(n)$, on obtient

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{n,i} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \; p.s.$$

Voici un exemple où l'hypothèse (iii) est satisfaite, i.e.$\{E(X_{n,1}|\mathcal{T}_{nn})\}_n$ est une martingale renversée.

Exemple: Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.i.i.d. de variance finie, alors si on prend

$X_{n,i} = X_i - \overline{X}_n$ avec $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Il vient que la suite $\{X_{n,i} : 1 \leq i \leq n\}$ est interchangeable pour tout n. De plus les trois conditions du théorème précédent sont vérifiées:

i) $EX_{n,1}X_{n,2} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ car

$$\begin{aligned} EX_{n,1}X_{n,2} &= E[(X_1 - \overline{X}_n)(X_2 - \overline{X}_n)] \\ &= E(X_1X_2) - E(X_1\overline{X}_n) - E(X_2\overline{X}_n) + E(\overline{X}_n)^2 \\ &= \frac{(EX_1)^2}{n} - \frac{EX_1^2}{n} \longrightarrow 0 \text{ quand } n \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

ii) $EX_{n,1}^2 = o(n)$ est trivial.

iii) $\{E(X_{n,1}|\mathcal{T}_{nn})\}_n$ est une martingale renversée, car

$$\mathcal{T}_{nn} = \sigma\{\sum_{k=1}^{n} X_{n,k}, \sum_{k=1}^{n+1} X_{(n+1),k}, ...\} = \sigma\{0, 0, ...\}.$$

On peut obtenir aussi le même résultat avec des conditions plus fines que celles du théorème précédent.

Théorème 9 Soient $(X_{n,k}, 1 \leq k \leq n)$ des v.a. infiniment interchangeables pour chaque $n \geq 1$, avec $\mathcal{T}_{nn} = \sigma\{\sum_{k=1}^{n} X_{n,k}, \sum_{k=1}^{n+1} X_{(n+1),k}, ...\}$. Si :

i) $E|X_{n,1}| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$,

ii) $\{E(X_{n,1}|\mathcal{T}_{nn})\}_n$ est une martingale renversée

alors

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{n,i} \longrightarrow_{n \to +\infty} 0 \; p.s.$$

Démonstration : On a $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{n,i} = E(X_{n,1}|\mathcal{T}_{nn})$ $p.s.$ (voir l'Annexe). Or

$$\begin{aligned}
P[\sup_{n\geq m}|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{n,i}|>\varepsilon] &= P[\sup_{n\geq m}|E(X_{n,1}|\mathcal{T}_{nn})|>\varepsilon] \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{[\sup\limits_{n\geq m}|E(X_{n,1}/\mathcal{T}_{nn})|>\varepsilon]} |E(X_{m,1}|\mathcal{T}_{mm})|dP \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega}|E(X_{m,1}|\mathcal{T}_{mm})|dP \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}E|X_{m,1}|
\end{aligned}$$

d'où si $E|X_{n,1}| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$, alors

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{n,i} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \; p.s.$$

Théorème 10 *voir [10]* Soient $(X_{n,k}, k \geq 1)$ des v.a. infiniment interchangeables pour chaque ligne $n \geq 1$. Si

i) $\sum_{n=1}^{\infty} E(X_{n,1}X_{n,2}) < \infty$.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} E(|X_{n,1}|^{2q})/n^q < \infty$ pour un $q \geq 1$

alors

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{n,i} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \; c.c.$$

Démonstration: voir théorème 19 du chapitre 3.

Théorème 11 *voir [10]* Soit $(X_{n,k}, k \geq 1)$ une suite infiniment interchangeable pour chaque ligne $n \geq 1$. Si

i) $\sum_{n=1}^{\infty} E(X_{n,1}X_{n,2}) < \infty$,

ii) $|X_{n,k}| \leq K$ p.s. pour tout n et k,

iii) $(a_{n,k})_{n,k}$ est une suite de réels avec $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n,k}| \leq 1$ et $\max\limits_{k}|a_{n,k}| = O(n^{-\gamma})$ avec $\gamma > 0$

alors

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} X_{n,k}| \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \ c.c.$$

Théorème 12 *voir [10]* Soient $(X_{n,k}, k \geq 1)$ des v.a. infiniment interchangeables pour chaque ligne $n \geq 1$. Si

i) $\sum_{n=1}^{\infty} E(X_{n,1}X_{n,2}) < \infty$,

ii) $P[X_{n,k} \in K] = 1$ pour tout n et k, où K un compact de $\mathcal{R}$,

iii) $(a_{n,k})_{n,k}$ est une suite de réels avec $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \leq 1$ et $\sum_{n=1}^{\infty} exp(-\alpha/A_n) < \infty \ \forall \alpha > 0$

avec $A_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}^2$

alors

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} X_{n,k}| \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \ c.c.$$

On peut obtenir un résultat plus explicite en modifiant les conditions du Théorème 12.

Théorème 13 Soient $(X_{n,k}, k \geq 1)$ des v.a. infiniment interchangeables pour chaque ligne $n \geq 1$. Si

i) $\sum_{n=1}^{\infty} E(X_{n,1}X_{n,2}) < \infty$,

ii) $P[X_{n,k} \in K] = 1$ pour tout n et k où K un compact de $\mathcal{R}$,

iii) k_n une suite d'entiers telle que $\liminf_{n\to+\infty} \frac{k_n}{\log\, n} = \infty$

alors

$$\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_n} X_{n,k} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \ c.c.$$

Démonstration: Il suffit d'appliquer le théorème 12 en prenant

$$a_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{k_n} & \text{si } k \leq k_n \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On a $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| = \sum_{k=1}^{k_n} \frac{1}{k_n} \leq 1$, et $A_n = \frac{1}{k_n}$. Donc, si $\liminf_{n \to +\infty} \frac{k_n}{\log n} = \infty$ alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} exp(-\alpha/A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} exp(-\alpha k_n) < \infty.$$

Donc la condition (iii) du théorème 12 est vérifiée.

Définition 9 *voir [11]* Étant donné une famille de variables aléatoires $\{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ construites sur le même espace de probabilité, on dit qu'elle est **symétriquement interchangeable** si, pour toute permutation π des indices de {1, 2, 3, ... ,n} et tout choix d'ensembles $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$,

on a

$$P(Y_m \in A_m, m = 1, 2, \dots, n) = P(v_m Y_{\pi(m)} \in A_m, m = 1, 2, \dots, n)$$

pour tout choix de $v_i = \pm 1, i = 1, ..., n$.

Définition 10 *voir [11]* On dit d'une suite de v.a. $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ construites sur le même espace de probabilité, qu'elle est **symétriquement interchangeable** si toutes les familles finies $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$ sont symétriquement interchangeables pour $n \geq 2$.

Théorème 14 *voir [11]* Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. symétriquement interchangeable. Si $E|X_1|^p < \infty$ pour un $p \geq 2$, alors

$$E|\sum_{i=1}^{k_n} X_i|^p = O(k_n^{p/2} E|X_1|^p).$$

Théorème 15 *voir [11]* Soit $(X_{n,k}, k \geq 1)$ une suite infiniment et symétriquement interchangeable pour chaque ligne $n \geq 1$. Si pour un $p > 2$ on a $E|X_{n,1}|^p \leq M$ pour tout n, alors

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{n,i} \longrightarrow_{n \to +\infty} 0 \; c.c.$$

Démonstration: Par l'inégalité de Markov et par le théorème 14 ($k_n = n$), on a

$$P[|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{n,i}| > \varepsilon] \leq n^{-p}\varepsilon^{-p}E|\sum_{i=1}^{n} X_{n,i}|^p \leq \varepsilon^{-p}n^{-p/2}cE|X_{n,1}|^p$$

Puisque $E|X_{n,1}|^p \leq M$ et que $p > 2$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{n,i}| > \varepsilon] < \infty,$$

$$i.e.\quad \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{n,i} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \; c.c.$$

Voici une extension.

Théorème 16 Soit $(X_{n,k}, k \geq 1)$ une suite de v.a. infiniment et symétriquement interchangeables pour chaque ligne $n \geq 1$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(X_{n,1}^2)}{k_n} < \infty$, alors

$$\overline{X}_n = \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \; c.c.$$

Démonstration: Par l'inégalité de Markov et par le théorème 14 on a

$$P[\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i} > \varepsilon] \leq k_n^{-2}\varepsilon^{-2}E|\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i}|^2 = O(k_n^{-1}EX_{n,1}^2).$$

Puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(X_{n,1}^2)}{k_n} < \infty,$$

alors

$$\overline{X}_n = \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \; c.c.$$

Chapitre 3

Nouveaux résultats pour les tableaux

Dans ce chapitre, on va traiter le problème de la convergence ou divergence complète dans les tableaux à rangées i.i.d., ainsi que dans les tableaux à rangées infiniment interchangeables. Une attention particulière est apportée au comportement des moyennes partielles, qui ne peuvent pas être ralenties indéfiniment.

3.1 La convergence partielle des tableaux à rangées de v.a.i.i.d.

Théorème 17 Soit $(X_{n,k}, k \geq 1)$ i.i.d. pour chaque $n \geq 1$, les variables aléatoires pouvant être dépendantes d'une rangée à l'autre, si les conditions suivantes sont vérifiées:

i) $EX_{n,1} = 0, \ \forall n \geq 1$,

ii) $\varphi(t) = \sup_n Ee^{t|X_{n,i}|} < \infty$, pour au moins un $t > 0$,

iii) $\liminf_{n \to +\infty} \dfrac{k_n}{\log\, n} = \infty$

alors

$$\overline{X}_n = \frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \ c.c.$$

Démonstration : En posant $\varphi_n(t) = Ee^{t|X_{n,i}|}$, il existe un t tel que $\varphi_n(t) \le \varphi(t) < \infty$ pour tout n puisque $\sup_n Ee^{t|X_{n,i}|} = \varphi(t) < \infty$ pour au moins un $t > 0$

$\Longrightarrow \forall s \in (-t,t)$, $\varphi_n(s) < \infty$ car$f(x) = e^x$ est croissante

$\Longrightarrow$ $\varphi_n(t)$ est continue, de plus, elle admet des dérivées de tous les ordres au point 0. Donc on peut développer $\varphi_n(t)$ en série de Maclaurin:

$$\varphi_n(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{M_n^m(0)}{m!}t^m = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{E|X_{n,1}|^m}{m!}t^m \text{ pour tout n et tout } t > 0 \text{ assez petit .}$$

On a donc

$$\frac{E|X_{n,1}|^m}{m!}t^m \le \varphi_n(t) \le \varphi(t), \quad \forall n$$

$$\Longrightarrow \qquad E|X_{n,1}|^m \le \varphi(t)t^{-m}m! = 2\varphi(t)t^{-2}m!\frac{1}{2t^{m-2}}.$$

Donc, si on prend $c = \frac{1}{t}, v_k = 2\varphi(t)t^{-2}$ et $\lambda = \varepsilon\sqrt{k_n}$, on peut appliquer l'inégalité de Bernstein (voir l'Annexe) qui donne :

$$P(\overline{X}_n > \varepsilon) \le exp\Big(- \frac{\varepsilon^2 k_n/2}{2\varphi(t)t^{-2} + \varepsilon t^{-1}}\Big)$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} P(\overline{X}_n > \varepsilon) \le \sum_{n=1}^{+\infty} exp\Big(- \frac{\varepsilon^2 k_n/2}{2\varphi(t)t^{-2} + \varepsilon t^{-1}}\Big).$$

Puisque $\liminf_{n\to+\infty} \frac{k_n}{\log\, n} = \infty$, alors $\forall K > 0$, on peut trouver N_K tel que $\forall n > N_K$ on a $\frac{k_n}{\log\, n} > K \Longrightarrow k_n > K\log\, n$. D'où,$\forall K > 0$

$$\sum_{n\ge N_K} exp(-\frac{\varepsilon^2 k_n/2}{2\varphi(t)t^{-2} + \varepsilon t^{-1}}) \le \sum_{n\ge N_K} exp(-\frac{(\varepsilon^2 K\log\, n)/2}{2\varphi(t)t^{-2} + \varepsilon t^{-1}}),$$

En prenant $K = K_\varepsilon = 2\Big(\frac{\varepsilon^2/2}{2\varphi(t)t^{-2} + \varepsilon t^{-1}}\Big)^{-1}$, on obtient

$$\sum_{n\ge N_{K_\varepsilon}} exp(-\frac{\varepsilon^2 k_n/2}{2\varphi(t)t^{-2} + \varepsilon t^{-1}}) \le \sum_{n\ge N_{K_\varepsilon}} exp(-2\log\, n) = \sum_{n\ge N_{K_\varepsilon}} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

$$i.e. \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} P(\overline{X}_n > \varepsilon) < \infty.$$

Un argument similaire donne $\sum_{n=1}^{+\infty} P(\overline{X}_n < -\varepsilon) < \infty$ et on conclut par le lemme de Borel-Cantelli que

$$\overline{X}_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \; c.c.$$

Inégalité de Mill [5].

$$\forall\lambda > 0, \quad (\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^3})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{\lambda^2}{2}) < P(N(0,1) > \lambda) < \frac{1}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{\lambda^2}{2})$$

Proposition 1 Soit $(X_{n,k})_{n,k}$ une suite double de v.a. normales $N(\mu_{n,k}, \sigma^2_{n,k})$ telle que les $X_{n,k}$ sont i.i.d. $\forall\, n \geq 1, \forall\, k \geq 1$.

Si $\liminf_{n\to+\infty} \frac{k_n^2}{\sum_{i=1}^{k_n} \sigma^2_{n,i}(\log\, n)} = \infty$, alors l'énoncé $\lim_{n\longrightarrow+\infty} (\overline{X}_n - \frac{\sum_{i=1}^{k_n} \mu_{n,i}}{k_n}) = 0 \; p.s.$ est vrai.

Par contre si $\limsup_{n\to+\infty} \frac{k_n^2}{\sum_{i=1}^{k_n} \sigma^2_{n,i}(\log\, n)} < \infty$, l'énoncé est faux.

Démonstration: On a $(\overline{X}_n, n \geq 1)$ indépendantes, donc par Borel-Cantelli

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty} (\overline{X}_n - \frac{\sum_{i=1}^{k_n} \mu_{n,i}}{k_n}) = 0 \;\; p.s. \quad &\iff \quad \sum_{n\geq1} P(|\overline{X}_n - \frac{\sum_{i=1}^{k_n} \mu_{n,i}}{k_n}| > \varepsilon) < \infty \;\; \forall\varepsilon > 0 \\
&\iff \quad \sum_{n\geq1} P(|N(0,1)| > \varepsilon\frac{k_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k_n} \sigma^2_{n,i}}}) < \infty \;\; \forall\varepsilon > 0 \\
&\iff \quad \sum_{n\geq1} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{k_n} \sigma^2_{n,i}}}{k_n} exp(-\varepsilon^2\frac{k_n^2}{2\sum_{i=1}^{k_n} \sigma^2_{n,i}}) < \infty \quad \text{(Mill)}.
\end{aligned}$$

Donc si $\liminf_{n \to +\infty} \frac{k_n^2}{\sum_{i=1}^{k_n} \sigma_{n,i}^2 (\log\ n)} = \infty$, alors l'argument de preuve du théorème 17 permet de confirmer le premier énoncé.

Par contre si $\limsup_{n \to +\infty} \frac{k_n^2}{\sum_{i=1}^{k_n} \sigma_{n,i}^2 (\log\ n)} < \infty$ alors il existe un $K > 0$ tel que

$$\frac{k_n^2}{\sum_{i=1}^{k_n} \sigma_{n,i}^2 (\log\ n)} < K, \forall n \geq 2 \Longrightarrow \frac{k_n^2}{\sum_{i=1}^{k_n} \sigma_{n,i}^2} < K(\log\ n)$$

d'où pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{k_n} \sigma_{n,i}^2}}{k_n} exp(-\varepsilon^2 \frac{k_n^2}{2 \sum_{i=1}^{k_n} \sigma_{n,i}^2}) > \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{K \log\ n}} exp(-\varepsilon^2 K \log\ n/2).$$

Donc, pour $\varepsilon^2 = K^{-1}$ on a : $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{K \log\ n}} exp(-\varepsilon^2 K \log\ n/2) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{K \log\ n}} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Puisque $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\log\ n}{n} = 0$, il existe un N_1 tel que pour tout $n > N_1$ on a $\frac{\log\ n}{n} < 1$.

$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\log\ n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall n > N_1$. Ainsi $\sum_{n \geq N_1} \frac{1}{\sqrt{K \log\ n}} \frac{1}{\sqrt{n}} > \sum_{n \geq N_1} \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{1}{n} = \infty$, ce qui permet de conclure que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{k_n} \sigma_{n,i}^2}}{k_n} exp(-\varepsilon^2 \frac{k_n^2}{2 \sum_{i=1}^{k_n} \sigma_{n,i}^2}) = \infty$ et que l'énoncé

$\lim_{n \longrightarrow +\infty} (\overline{X}_n - \frac{\sum_{i=1}^{k_n} \mu_{n,i}}{k_n}) = 0$ $p.s.$ est faux.

Corollaire 1: Soit $(X_{n,k})_{n,k}$ une suite de variables N(0,1) i.i.d. $\forall\ n \geq 1, \forall\ k \geq 1$. Alors, si

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{k_n}{\log\ n} = \infty$$

on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \overline{X}_n = 0 \; p.s.$$

Par contre, si $\limsup_{n \to +\infty} \dfrac{k_n}{\log n} < \infty$ l'énoncé est faux.

3.2 La convergence partielle des tableaux à rangées infiniment interchangeables

Théorème 18 Soient $(X_{n,k}, k \geq 1)$ des v.a. infiniment interchangeables pour chaque ligne $n \geq 1$ et telles que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

i) il existe une constante $K > 0$ telle que $|X_{n,k}| \leq K < \infty$, $\forall n$ et $\forall k$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} EX_{n,1}X_{n,2} < \infty$.

Sous ces conditions,

$$\overline{X}_n \longrightarrow_{n \to +\infty} 0 \; c.c. \text{ dès que } \liminf_{n \to +\infty} \frac{k_n}{\log n} = \infty$$

Démonstration: Si on pose $Y_{n,k} = X_{n,k} - E(X_{n,1}|\mathcal{T}_n)$, alors, pour n fixé, $(Y_{n,k})_k$ est $\mathcal{T}_n$ -i.i.d. De plus, $\forall n$ et k, $EY_{n,k} = 0$ et $E(|Y_{n,k}|^m|\mathcal{T}_n) \leq (2K)^m < 2(2K)^2 \dfrac{(2K)^{m-2}}{2} m!$, $\forall m \geq 2$. Et par l'inégalité de Bernstein pour $v_K = 2(2K)^2, c = 2K$ et $\lambda = \varepsilon\sqrt{k_n}$ on a, pour une version réguliére de $P(\bullet|\mathcal{T}_n)$,

$$P[\overline{Y}_n > \varepsilon|\mathcal{T}_n] \leq exp(-\frac{\varepsilon^2 k_n/2}{2(2K)^2 + \varepsilon 2K}).$$

Et d'après le théorème de deFinetti, on obtient

$$\begin{aligned} P[\overline{X}_n > \varepsilon] &\leq P[\overline{Y}_n > \frac{\varepsilon}{2}] + P[E(X_{n,1}|\mathcal{T}_n) > \frac{\varepsilon}{2}] \\ &\leq P[\overline{Y}_n > \frac{\varepsilon}{2}] + 4\varepsilon^{-2}E(X_{n,1}X_{n,2}) \\ &\leq exp(-\frac{\varepsilon^2 k_n/8}{2(2K)^2 + \varepsilon K}) + 4\varepsilon^{-2}E(X_{n,1}X_{n,2}) \end{aligned}$$

Si $\liminf_{n\to+\infty} \dfrac{k_n}{\log\, n} = \infty$ alors $\forall M, \exists\, N$ tel que $\forall n > N$ on a, $k_n > M \log\, n$.

Donc, si on prend $M = M_{\varepsilon,K} = \dfrac{16(2(2K)^2 + \varepsilon K)}{\varepsilon^2}$, on obtient

$$P[\overline{X}_n > \varepsilon] \leq \frac{1}{n^2} + 4\varepsilon^{-2} E(X_{n,1}X_{n,2}) \;\; \forall n > N$$

et donc

$$\sum_{n\geq N} P[\overline{X}_n > \varepsilon] < \infty.$$

Similairement on prouve $\sum_{n\geq N} P[\overline{X}_n < -\varepsilon] < \infty$ et donc

$$\overline{X}_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \; c.c.$$

Théorème 19 Soient $(X_{n,k}, k \geq 1)$ des v.a. infiniment interchangeables pour chaque ligne $n \geq 1$ telles que :

i) $\sum_{n=1}^{\infty} E(X_{n,1}X_{n,2}) < \infty$,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{E|X_{n,1}|^{2q}}{k_n^q} < \infty$ pour un $q \geq 1$ donné,

alors

$$\overline{X}_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \; c.c.$$

Démonstration: Soit $\mathcal{T}_n$ la σ-algèbre telle que, pour tout n fixé, la suite $(X_{n,k})_k$ est $\mathcal{T}_n$-i.i.d. et soit ν_n l'espérance conditionnelle $E(X_{n,1}|\mathcal{T}_n)$. Pour prouver que

$$\overline{X}_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \; c.c.$$

il suffit de prouver que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\nu_n| > \varepsilon) < \infty \text{ et } \sum_{n=1}^{\infty} P[|\sum_{i=1}^{k_n}(X_{n,i} - \nu_n)| > k_n\varepsilon] < \infty, \;\; \forall \varepsilon > 0.$$

La première série converge grâce à la condition i) car l'inégalité de Markov donne

$$\varepsilon^2 P(|\nu_n| > \varepsilon) \leq E(\nu_n^2) = E(X_{n,1}X_{n,2})$$

Et pour la deuxième série, on a par l'inégalité de Marcinkiewicz-Zygmund (voir [12]) :

$$E\left(|\sum_{i=1}^{k_n}(X_{n,i}-\nu_n)|^{2q}|\mathcal{T}_n\right) \leq (8q)^q E\left(|\sum_{i=1}^{k_n}(X_{n,i}-\nu_n)^2|^q|\mathcal{T}_n\right) \quad \forall q \geq 1.$$

Et par les inégalités de Markov et de Hölder, on obtient :

$$(k_n\varepsilon)^{2q}P[|\sum_{i=1}^{k_n}(X_{n,i}-\nu_n)| > k_n\varepsilon|\mathcal{T}_n] \leq (8qk_n)^q E[|X_{n,1}-\nu_n|^{2q}|\mathcal{T}_n], \quad \forall\varepsilon > 0$$

et finalement, la condition ii) donne

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|\sum_{i=1}^{k_n}(X_{n,i}-\nu_n)| > k_n\varepsilon] \leq (\frac{32q}{\varepsilon^2})^q \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|X_{n,1}|^{2q}}{k_n^q} < \infty \quad \forall\varepsilon > 0$$

et donc

$$\overline{X}_n = k_n^{-1}\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \ \ c.c.$$

Théorème 20 *:* Soient $(X_{n,k}, k \geq 1)$ des v.a. infiniment interchangeables pour chaque ligne $n \geq 1$ telles que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

i) $\sum_{n=1}^{\infty} EX_{n,1}X_{n,2} < \infty$,

ii) $\sup_n \psi_{|X_{n,1}|}(t) < \infty$ pour un $t > 0$ avec $\psi_{|X_{n,1}|}(t) = 1 + \sum_{q=1}^{\infty}\frac{E|X_{n,1}|^{2q}}{\sqrt{2q\pi}}t^{2q}$.

Alors

$$\overline{X}_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \ c.c. \quad \text{si} \quad \liminf_{n\to+\infty}\frac{k_n}{\log\, n} = \infty$$

Démonstration: On reprend la démonstration du théorème 19 qui demeure inchangée jusqu'au passage suivant

$$(k_n\varepsilon)^{2q}P[|\sum_{i=1}^{k_n}(X_{n,i}-\nu_n)| > k_n\varepsilon\big|\mathcal{T}_n] \leq (8qk_n)^q E[|X_{n,1}-\nu_n|^{2q}\big|\mathcal{T}_n] \quad \forall\varepsilon > 0 \text{ et } \forall q \geq 1$$

Par la Formule de Stirling, $\forall q \geq 1$ on a
$q! = e^{a_q} q^{q+1/2} e^{-q} \sqrt{2\pi}$ avec $\dfrac{1}{12q+1} < a_q < \dfrac{1}{12q}$.
Alors

$$P[|\sum_{i=1}^{k_n}(X_{n,i} - \nu_n)| > k_n\varepsilon] \leq \left[\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(k_n\varepsilon^2 t^2/64e)^q}{q!}\right]^{-1} (1 + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{E|X_{n,1}|^{2q}}{\sqrt{2q\pi}} t^{2q}).$$

Donc par la condition ii), on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i} - \nu_n| > k_n\varepsilon] \leq \sup_n \psi_{|X_{n,1}|}(t) \sum_{n=1}^{\infty} exp(-k_n\varepsilon^2 t^2/64e).$$

Ainsi, si $\liminf_{n\to+\infty} \dfrac{k_n}{\log\, n} = \infty$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i} - \nu_n| > k_n\varepsilon] < \infty \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Théorème 21 Soient $(X_{n,k}, k \geq 1)$ des v.a. infiniment interchangeables pour chaque ligne $n \geq 1$ telles que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

i) $\sum_{n=1}^{\infty} EX_{n,1}X_{n,2} < \infty$.

ii) $\sup_n Ee^{t|X_{n,i}|} < \infty$ pour au moins un t > 0

iii) $\liminf_{n\to+\infty} \dfrac{k_{n+1}}{M(n)} > 0$ où $M(n) = \sum_{i=1}^{n} k_i$

alors

$$\overline{X}_n = k_n^{-1} \sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \; c.c.$$

Démonstration: On reprend encore une fois la démonstration du théorème 19 qui demeure inchangée jusqu'au passage suivant

$$(k_n\varepsilon)^{2q} P[|\sum_{i=1}^{k_n}(X_{n,i} - \nu_n)| > k_n\varepsilon | \mathcal{T}_n] \leq (8qk_n)^q E[|X_{n,1} - \nu_n|^{2q} | \mathcal{T}_n] \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Par la série de Maclaurin d'exponentielle et de cosinus hyperbolique plus l'inégalité suivante, $(2q)!q^q \leq (2q)!q!e^q \leq (3q)!$ qui reste vraie pour tout $q \geq 0$, nous avons

$$P[|\sum_{i=1}^{k_n}(X_{n,i} - \nu_n)| > k_n\varepsilon | \mathcal{T}_n] \leq \left[\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(k_n\varepsilon^2 t^2/32)^q}{(3q)!}\right]^{-1} E(cosh[(t/2)|X_{n,1} - \nu_n|] | \mathcal{T}_n).$$

Et puisque $e^u - 2 \le e^u + e^{\zeta u} + e^{\zeta^2 u} = 3\sum_{q=0}^{\infty} u^{3q}/(3q)!\ \forall u > 0$ et $\zeta = e^{2\pi i/3}$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\sum_{i=1}^{k_n}(X_{n,i} - \nu_n)| > k_n\varepsilon) < \infty$$

car si $\liminf_{n\to+\infty} \frac{k_{n+1}}{M(n)} > 0$, alors il existe un $\delta > 0$ tel que $k_{n+1} > \delta M(n)$ pour un n assez grand, et avec un simple calcul, on montre

$$k_{n+1} > \delta(1+\delta)^{n-1}k_1 = c\lambda^{n+1} \quad \forall n > N(\delta)$$

où $c = \delta(1+\delta)^{-2}k_1$ et $\lambda = 1 + \delta > 1$, d'où

$$\sup_n Ecosh[(t/2)|X_{n,1} - \nu_n|] \sum_{n=1}^{\infty} exp\Big(- [k_n\varepsilon^2 t^2/32]^{1/3}\Big)$$

$$\le \sup_n Ecosh[t|X_{n,1}|] \sum_{n=1}^{\infty} exp\Big(- [k_n\varepsilon^2 t^2/32]^{1/3}\Big) < \infty.$$

Remarque Si $\liminf_{n\to+\infty} \frac{k_{n+1}}{M(n)} > 0$ alors $\liminf_{n\to+\infty} \frac{k_n}{\log\, n} = \infty$.

Théorème 22 Soient $(X_{n,k}, k \ge 1)$ des v.a. infiniment et symétriquement interchangeables pour chaque ligne $n \ge 1$ telles que :

$$\sup_n \varphi_{|X_{n,1}|^2}(t) < \infty \text{ pour un } t > 0.$$

Alors

$$\overline{X}_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0\ c.c. \quad \text{si} \quad \liminf_{n\to+\infty} \frac{k_n}{\log\, n} = \infty.$$

Démonstration: On déduit de l'inégalité de Khintchine (voir [11] p 331) que

$$P[\frac{1}{k_n}|\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i}| > \varepsilon] \le k_n^{-2p}\varepsilon^{-2p}E|\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i}|^{2p} \le (\varepsilon^{-2}k_n^{-1})^p pE(|X_{n,1}|^{2p}).$$

Donc, pour un $t > 0$, il vient

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon^2 t k_n)^p}{tp!} P[|\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i}| > k_n\varepsilon] \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{E(|X_{n,1}|^{2p})t^{p-1}}{(p-1)!} = \varphi'_{|X_{n,1}|^2}(t).$$

Or, si $\sup_n \varphi_{|X_{n,1}|^2}(t) < \infty$ pour un $t > 0$ alors, $\sup_n \varphi'_{|X_{n,1}|^2}(t') < \infty$, pour $|t'| \leq t$ d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i}| > k_n\varepsilon] \leq t \sup_n \varphi'_{|X_{n,1}|^2}(t) \sum_{n=1}^{\infty} exp(-\varepsilon^2 t k_n).$$

Donc, si on suppose que $\liminf_{n\to+\infty} \frac{k_n}{\log\ n} = \infty$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i}| > k_n\varepsilon] < \infty.$$

$$i.e. \quad \overline{X}_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0\ c.c.$$

Dans les cas de v.a.i.i.d. ou v.a. symétriquement interchangeables, la proposition suivante montre que si les deuxièmes moments sont uniformément bornés sur toutes les lignes, alors il y a convergence complète pour les sous-suites à croissance rapide.

Proposition 2 Soit $(X_{n,k}, k \geq 1)$ une suite infiniment et symétriquement interchangeable pour chaque ligne $n \geq 1$ telle que $\sup_n E|X_{n,1}|^2 < \infty$ alors

$$\overline{X}_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0\ c.c. \text{ si } \liminf_{n\to+\infty} \frac{k_{n+1}}{M(n)} > 0 \text{ où } M(n) = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

Démonstration: On a montré que si $\liminf_{n\to+\infty} \frac{k_{n+1}}{M(n)} > 0$, alors il existe un $c > 0$ et un $\lambda > 1$ tels que $k_n > c\lambda^n\ \ \forall n > N(\lambda)$, d'où par l'inégalité de Markov, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|\sum_{i=1}^{k_n} X_{n,i}| > k_n\varepsilon] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{-2} E|\bar{X}_{k_n}|^2 \leq \sup_n E|X_{n,1}|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{-2}}{c\lambda^n} < \infty$$

$$\text{et donc} \quad \overline{X}_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0\ c.c.$$

Conclusion

Dans le premier chapitre, le théorème de Hsu-Robbins-Erdös montre que la convergence complète, la loi du logarithme itéré et le théorème de limite centrale sont équivalents pour les suites i.i.d.; ce qui nous amène à dire que la condition suffisante de la convergence complète pour les suites infiniment interchangeables que nous avons montrée, est aussi nécessaire dans ce cas puisque cette condition se trouve dans les deux résultats cités plus haut. Dans le troisième chapitre, on a vu que si la fonction génératrice des moments est finie sur chaque ligne d'un tableau à rangées de v.a.i.i.d. ou infiniment interchangeables, on a la convergence partielle; mais considérant la proposition 1 pour le cas des v.a.i.i.d. et la proposition 2 pour le cas des v.a. infiniment interchangeables, nous pensons que cette condition n'est pas nécessaire si on est capable de contrôler le comportement des moyennes partielles de ces v.a.

Annexe

Théorème 23 *[8]* Soit$(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires interchangeables et f: $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ une fonction Borel-mesurable, telle que $E|f(X_1)| < \infty$.
Si $\mathcal{F}_m = \sigma(\sum_{k=1}^{m} f(X_k), \sum_{k=1}^{m} X_k, X_{m+1}, X_{m+2}, ...)$ alors

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(X_k) = E[f(X_1)|\mathcal{F}_m] \; p.s.$$

De plus $(\mathcal{F}_m)_m$ est une filtration renversée et $(E[f(X_1)|\mathcal{F}_m], \mathcal{F}_m)$ est une martingale renversée.

Théorème 24 *[8]* Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires interchangeables. Alors il existe une tribu $\mathcal{T}$ telle que

$$P(X_1 \leq \alpha_1, ..., X_m \leq \alpha_m) = \int_\Omega \prod_{j=1}^{m} P(X_1 \leq \alpha_j|\mathcal{T})dP$$

pour tout $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathcal{R}$. On peut choisir $\mathcal{T} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma(\mathbf{X_{n+1}}, \mathbf{X_{n+2}}, \dots)$

Théorème 25 (deFinetti) Soit Φ la collection des fonctions de distribution sur $\mathcal{R}$, les nombres réels, munie de la topologie faible. Alors pour toute suite interchangeable

$(X_n)_n$, il existe une mesure de probabilité μ sur la tribu Borel $\sigma(\Phi)$ telle que, pour tout $B \in \sigma(\Phi)$ et tout g : $\mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}$ Borel-mesurable, on a

$$P[g(X_1, X_2, ., ., .X_n) \in B] = \int_{\Phi} P_F[g(X_1, X_2, ., ., .X_n) \in B] d\mu(F) \ \ \forall n$$

où $P_F[\bullet] = P[\bullet|\sigma(\Phi)]$. De plus $(X_n)_n$ est F-i.i.d. par rapport à la mesure de probabilité μ.

Lemme 14 (Borel-Cantelli) Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ quelconque est donné.
a) Pour toute suite $A_1, A_2, ..., \in \mathcal{F}$ vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < \infty$, on a

$$P(\mathit{lim}\sup_n A_n) = \mathit{0}.$$

b) Pour toute suite $A_1, A_2, ..., \in \mathcal{F}$ d'événements mutuellement indépendants et satisfaisant $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \infty$, on a

$$P(\mathit{lim}\sup_n A_n) = \mathit{1}.$$

Inégalité de Doob 1 Étant donné une sousmartingale X_n, on a pour tout $c > 0$ et tout entier n

$$cP(\max_{0 \le m \le n} X_m > c) \le E(X_n^+) \le E|X_n|.$$

Inégalité de Doob 2 Étant donné une sousmartingale renversée X_n, on a pour tout $c > 0$ et tous entiers n et m

$$cP(\max_{m \le k \le n} X_k > c) \le E(X_m^+) \le E|X_m|.$$

Théorème 26 *[4]* Si $(X_n, \mathcal{S}_n)_n$ est une martingale renversée telle que $X_n \longrightarrow_{n \to +\infty} X$ *p.s.* alors $(X_n)_n$ est uniformément intégrable, et on a aussi $X_n \longrightarrow_{L_1} X$.

Théorème 27 de convergence de Lévy *[4]* Pour toute suite de v.a. $\{Y_n\}$ formant une martingale renversée, la limite $lim_n Y_n = Y_\infty$ existe p.s., est P-intégrable et la suite $\{Y_n\}$ est u.i.

Inégalité de Bernstein [5] Si $(X_k)_k$ est une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $EX_k = 0$ et $E|X_k|^m \leq v_k m! c^{m-2}/2, \forall m \geq 2$, où $c > 0$. Alors $\forall \lambda > 0$ on a

$$P(\sqrt{n}\bar{X} \geq \lambda) \leq exp\Big(- \frac{\lambda^2/2}{[\sum_{k=1}^{n} \frac{v_k}{n} + \frac{c\lambda}{\sqrt{n}}]}\Big) \ .$$

Bibliographie

[1] A.Gut, Complete convergence for arrays, Period.Math.Hung.(1992a). **25**.51-57.

[2] A.Gut, The weak law of large numbers for arrays, Stat.Probab.Lett.(1992b) **15**.49-52.

[3] B.deFinetti, Theory of probability, Wiley, New York.(1974).

[4] H.G.Tucker, A Graduate Course in Probability. Academic Press, New York, P.230-234 (1967).

[5] G.R.Shorak et J.A.Wellner, Empirical processes with applications to statistics. Wiley, New york.(1986). P.850-860

[6] P.Erdös, On a theorem of Hsu and Robbins, Ann. Math. Statistcs.(1949).**20** 286-291

[7] P.Erdös.(1950), Remark on my paper,On a theorem of Hu and and Robbins,Ann. Math. Statist.(1950).21.138.

[8] P.Z.Daffer, R.F.Patterson et R.L.Taylor, Limit theorems for sums of exchangeable random variable.1985. Rowman and allenheld, Totowa NJ.

[9] R.F.Patterson et R.L.Taylor, Strong laws of large numbers for triangular arrays of exanchangeable random variables, (1985), Stoch. Anal. Appl. **3** 171-187.

[10] R.L.Taylor, Laws of large numbers for dependent random variables, In Colloquia

Mathematica Societatis János Bolyai, Vol.36 : Limit theorems in Probability and Statistics, Veszprem, Hungary, 1023-1042. (1982).

[11] R.L.Taylor et T.-C.Hu, On laws of large numbers for exchangeable random variables, Stoch. Anal. Appl. **5** 323-334.(1987).

[12] Y.Chow et H.Teicher, Probability theory: independance, interchangeability and martingales. Springer-Verlag, Berlin.(1988).